$\mathbb{R}^n$ 中的子空间.

① $\ker A$.

② Span.

最"经济"的生成元，以及组合系数的唯一性

定义："0"表出的唯一性 ⇒ 线性无关.

极大线性无关组. $v_1 \cdots v_n$ 中的子向量组

$v_{i_1}, \cdots v_{i_k}$ ① 无关

② 极大

"数目上最大的"线性无关组 ⇒ 极大无关组.

问题：极大 ⇒ 最大.

包含关系下的　　绝对数目上

定理：$v_{i_1}, \cdots v_{i_k}$ 是 $v_1, \cdots v_n$ 中的极大线性无关组，那么对任意 $v_{j_1} \cdots v_{j_l}$，$l > k$，则 $v_{j_1}, \cdots v_{j_l}$ 线性相关.

证明：（重要观察，线性组合的复合对应矩阵乘法）

具体来说：$v_1 \cdots v_n$ 写成 $w_1 \cdots w_k$ 的线性组合.

$$v_1 = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \cdots + a_{k1} w_k$$
$$v_2 = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \cdots + a_{k2} w_k$$

$\vdots$

$v_n = a_{1n} w_1 + \cdots \quad a_{kn} w_k$

写作矩阵 有 $(v_1 \cdots v_n) = (w_1, \cdots w_k) \cdot A$.

$A = (a_{ij})_{k \times n}$

另一方面，$w_1 \cdots w_k$ 是 $u_1 \cdots u_l$ 的线性组合

且 $(w_1 \cdots w_k) = (u_1 \cdots u_l) B$

则 $(v_1 \cdots v_n) = ((u_1 \cdots u_l) B) A$

$= (u_1 \cdots u_l) \cdot (BA)$)

$(v_{j_1} \cdots v_{j_l}) = (v_{i_1}, \cdots v_{i_k}) \cdot A$. $\quad A \in M_{k \times l}$

(上节结果：极大 $\Rightarrow$ $\mathrm{span}_{\mathbb{R}} (v_{i_1} \cdots v_{i_k})$

$= \mathrm{span} (v_1 \cdots v_n)$)

则 $x_1 v_{j_1} + \cdots + x_l v_{j_l} = (v_{j_1} \cdots v_{j_l}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix}$

$= (v_{i_1} \cdots v_{i_k}) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix}$

$= (v_{i_1} \cdots v_{i_k}) \left(A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} \right)$

$A\cdot x=0$ $\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_l\end{pmatrix}$ $\quad \underline{k<l}$

有非零解. $\Rightarrow$ $v_{j_1}\cdots v_{j_l}$ 线性相关.

推论: ① 若 $(v_{i_1}\cdots v_{i_k})$, $(v_{j_1}\cdots v_{j_l})$ 均为 $v_1\cdots v_n$ 的极大线性无关组. 则 $k=l$.

(定义 $(v_1\cdots v_n)$ 的 rank $=k$)

注意: 定义线性无关和相关性只用到了加法, 数乘以及 0 向量.

这里对 rk 的定义也只用到这些

② 若 $(v_{i_1}\cdots v_{i_k})$ 为 $v_1\cdots v_n$ 中的极大线性无关组, $(v_{j_1}\cdots v_{j_k})$ 线性无关, 则 $(v_{j_1}\cdots v_{j_k})$ 也是极大线性无关组.

对无穷多个 $\{v_i\}_{i\in I}$, $v_i\in\mathbb{R}^m$, 可以定义极大线性无关组, (由于大于 m 个向量的组一定线性相关. 极大组存在) 前述定理仍然成立.

特别的, 有

定理: 任意子空间 $W\subset\mathbb{R}^m$, 存在 $v_1\cdots v_k\in W$, 使得 $W=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1\cdots v_k)$

证明：取W中的极大线性无关组 $v_1 \cdots v_k$

$$span_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_k) = span_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_k, v)$$

$$\forall\, v \in W$$

$$v \in span_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_k) \Rightarrow span_{\mathbb{R}}(v_1, \cdots v_k) = W$$

定义：(基 basis) W中的极大线性无关组.

例：$W = \mathbb{R}^n$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(标准基)

由推论①，任意W的两组基中的向量个数相同为k.

定义：(维数 dimension) $\dim W = k$.

行空间，列空间.

性质：行变换不改变行空间，列变换不改变行空间维数.(列空间类似)

定理：行秩 = 行空间维数

列秩 = 列空间维数

<u>行秩 = 列秩</u>

基的性质：

$v_1 \cdots v_k$ 是 W 的基.

① $W = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_k)$

② $v_1 \cdots v_k$ 线性无关.

③ $k = \dim W$.

满足任意两条可推出 $v_1 \cdots v_k$ 是基.

证明：练习

维数的单调性. $W_1 \subset W_2$ 均为 $\mathbb{R}^n$ 子空间.

则 $\dim W_1 \leq \dim W_2$. 等号成立当且仅当 $W_1 = W_2$.

证明：W_1 中的线性无关组也是 W_2 中的线性无关组.

$\Rightarrow$ W_1 中的极大线性无关组向量个数 $\leq$ W_2 ……

(基扩充性质). W_1 的基可扩充为 W_2 的基.

证明：W_1 中的基 $v_1 \cdots v_k$.

W_2 中的基 $w_1 \cdots w_l$.

考虑. $v_1 \cdots v_k, w_1 \cdots w_l$ 向量组.

极大存在性方法二：取出其极大无关组

$v_1 \cdots v_k, w_{i_1} \cdots w_{i_a}$ 推出是 W_2 的基.

$(\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_k, w_{i_1} \cdots w_{i_a}) = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_k, w_1 \cdots w_l)$

$= W_2)$

维数守恒：$A_{m \times n}$. $\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\dim(\ker A)}} + \dim\underset{\operatorname{rk}(A)}{\underset{\|}{(\text{列空间})}} = n$

$\mathbb{R}^m$ 子空间.

证明：

秩不等式 $\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk}(A)$. 因为 AB 的列空间 $\subset$ A 的列空间.

课间练习：（子空间的交仍然是子空间）

$\mathbb{R}^4$ $W_1 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}\right)$,

$W_2 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}9\\10\\11\\12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}13\\14\\15\\16\end{pmatrix}\right)$

求出 $W_1 \cap W_2$ 的维数. "$\dim = 2$"

实数集上求解线性方程组的理论可以推广到哪些情形？

首先 未知元取值范围和系数之间有乘法，加法

例： $2x_1=3$. x_1 取整数无解.

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ ← 整数集

$2x_1+2x_2=3$. 无解.

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+2x_3=1. \end{cases}$ 无整数解.

能作消元法：还需要减法和除法.

例如：$\boxed{\mathbb{Q}}$ 有理数集 $\boxed{\mathbb{R}}$

$\boxed{\mathbb{C}}$ 复数集. .

$\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) :=$ (定义为) $\{a+b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

域 上求解线性方程组：

定义：$\mathbb{K}$, 集合, 有运算 $+$, $\times$, 0. 1.

$+: \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ 映射, $(a,b) \mapsto a+b$

$\times: \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ $(a,b) \mapsto a\times b$ (写作 ab)

+，× 交换律，结合律，分配律。

$$\begin{cases} a+b=b+a, & ab=ba \\ (a+b)+c = a+(b+c) & (ab)c = a(bc) \end{cases}$$

$$a(b+c)=ab+ac.$$

存在 $0\in\mathbb{K}$，$1\in\mathbb{K}$，使得 $0+a=a$，$1\times a=a$，$\forall a\in\mathbb{K}$.

还需要 $-$，$\div$

$\forall a\in\mathbb{K}$，存在 b，使得 $a+b=0$.（可证明唯一性，记作 $-a$）

对任意 $a\neq 0$，有 c，$a\cdot c=1$.（唯一性，记作 a^{-1}）

例子：$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b)\mid a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\}$. $\boxed{\mathbb{R}^2}$

定义："+" $(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$

"×"，$(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc)$

验证 "+"，"×" 有结合，交换，分配

"×" 结合律. ✓

$\big((a,b)\times(c,d)\big)\times(e,f)$

$=(ac-bd,\ ad+bc)\times(e,f)$

$= ((ac-bd)e-(ad+bc)\cdot f,\ (ac-bd)\cdot f+(ad+bc)\cdot e)$

$= (\underline{ace-bde-adf}-bcf.\ \ \underline{acf-bdf+ade+bce})$

$(a,b)\times((c,d)\times(e,f))$

$= (a,b)\times(\underline{ce-df},\ cf+de)$

$= (\underline{ace-adf-bcf-bde},\ \underline{acf+ade+bce-bdf})$

其他类似.

有 "0" $=(0,0)$ $\quad (0,0)+(a,b)=(a,b)$

"1" $=(1,0)$. $\quad (1,0)\cdot(a,b)=(a,b)$

验证 $-(a,b)=(-a,-b)$

$(a,b)\neq(0,0)$, 有 $(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2}.\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$

注意到 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 保持运算.

$a\mapsto(a,0)$

$\underline{(0,1)} \times (0,1) = (-1,0) = -(1,0) = \underline{-1}$

用 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 构造复数.

$\underline{(a,b)}$ 对应 $\underline{a+bi}$

$\underline{(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i}$

类似, $\mathbb{F}_p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, -, \times, \div, 0, 1)$

p 素数. 模 p 同余类.

$= \{\bar{0}, \bar{1}, \cdots \overline{p-1}\}$

$\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ 不是域. $\bar{p}$ 非0. $\bar{p}$ 没有逆.

域 $\mathbb{K}$ 作线性代数, $\mathbb{R}$ 上的理论均成立

(可作消元法)

$\mathbb{K}^n$, 线性函数. 方程组, 解的结构均成立.

秩, 维数, 子空间.

例: $\mathbb{Q}$ 一系数方程组 (系数) 线性有有理数解, 当且仅当有实数解.

证明: $Ax=b$ 有 $\mathbb{Q}$-解 $\Leftrightarrow$ $rk_{\mathbb{Q}}(A, b) = rk_{\mathbb{Q}}(A)$

$\Leftrightarrow$ $rk_{\mathbb{R}}(A, b) = rk_{\mathbb{R}}(A)$

$\Leftrightarrow$ 有 $\mathbb{R}$-解.

$\boxed{x_1^3 + x_2^3 = 1 \text{ 无 } \mathbb{Q}\text{-解.}}$

有 $\mathbb{R}$-解.

注意: $\mathbb{K}$ 可能是有限域. $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

$Ax=b$ 在 $\mathbb{R}$ 上, 有 2 个解. $\Rightarrow$ 无穷多解

在 $\mathbb{F}_p$ 上, 不成立.